Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 05.09.2014.

Euklidske geometrije II, pismeni ispit, (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

Zadatak br. 1

(50%)(a) Neka je $CEDF$ data ravan α, i neka je tačka A van nje ($A \notin \alpha$). Ako je AC okomica na ravan α i CD okomica na pravu $p(E, F)$ u ravni, pokazati da je $AD \perp EF$.

(50%)(b) Nacrtati pravu (npr. nacrtati prvu $p(C, G)$) tako da je okomite na svaku od dvije date prave (npr. okomita je na $p(A, B)$ i $p(C, D)$) koje ne pripadaju istoj ravni. Dokazati da je ova zajednička okomica (u ovom slučaju duž CG) najkraća udaljenost između pravih.

Zadatak br. 2

(30%)(a) Kroz datu tačku u ravni datog paralelograma povući pravu koja dijeli taj paralelogram na dva podudarna dijela.

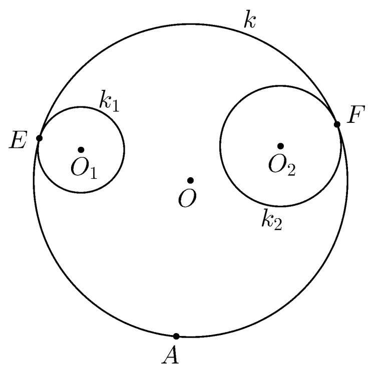
(70%)(b) Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku i od datog ugla odsjeca trougao datog obima.

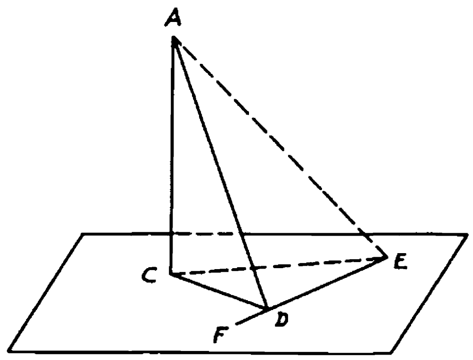
U oba zadatka detaljno sprovesti sve četri koraka: Analizu, Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju.

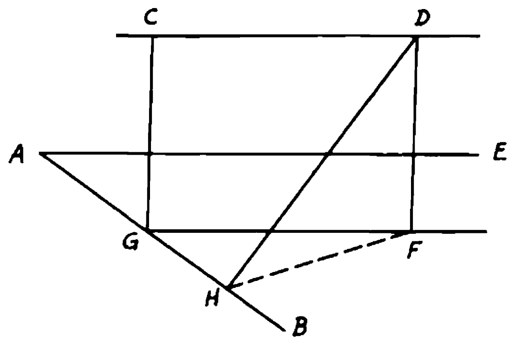
Zadatak br. 3

(30%)(a) Dat je $\triangle ABC$ u kome vrijedi da je $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Bez upotrebe Pitagorine teoreme pokazati da je $\measuredangle BCA$ prav ugao.

(70%)(b) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, ($r_1 < r_2$) i tačka A. Konstrisati krug k koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2 kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)







Rješenja-upute:

1.a

Nacrtajmo sliku i posmatrajmo prvave $p(A, E)$, $p(C, E)$. Riješimo zadatak: Kako je $AC \perp \alpha$ to je $AC \perp CD$ i CE. Time $AD^2 = AC^2 + CD^2$ i $AE^2 = AC^2 + CE^2 \Rightarrow AE^2 - AD^2 = CE^2 - CD^2$. Ali $CD \perp EF \Rightarrow CE^2 - CD^2 = DE^2 \Rightarrow AE^2 - AD^2 = DE^2 \Rightarrow \measuredangle ADE$ je pravi ugao što je ekvivalentno sa $AD \perp EF$.

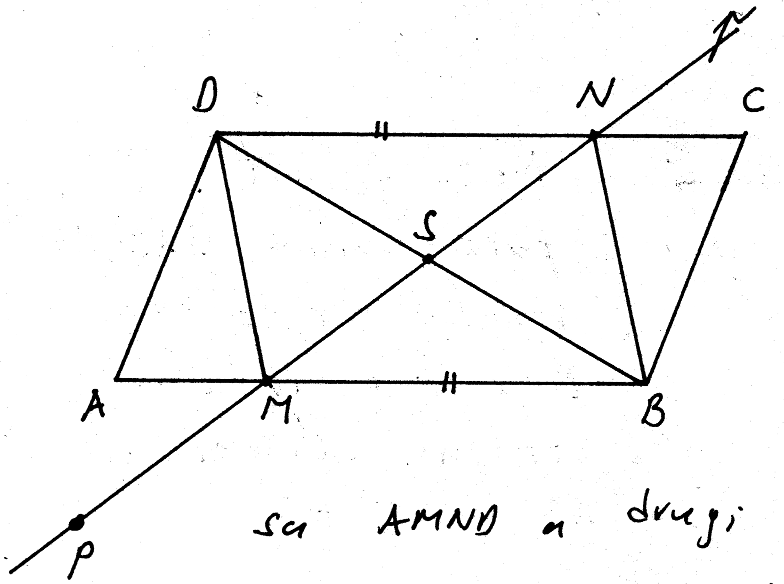
1.b

Nacrtajmo sliku: Neka su AB, CD dvije date prave. Kroz bilo koju tačku A prave $p(A, B)$ nactajmo $AE \| CD$. Nacrtajmo $DF \perp \alpha$ (α je ravan ABE) i $FG \| AE$ siječe pravu AB u tački G. Neka je DC podudarna sa FG i posmatrajmo $p(C, G)$. Riješimo zadatak: CD, FG su $\| AE \Rightarrow CD \| FG$ i $DF \perp \alpha \Rightarrow CG \perp \alpha \Rightarrow CG \perp AB$ i GF, a imamo i $GF \| CD \Rightarrow CG \perp AD$ i CD. Sad posmatrajmo bilo koju drugu pravu $p(D, H)$ između pravih $p(A, B)$ i $p(C, D)$. Kako je $DF \perp \alpha$ $\Rightarrow DF \perp FH \Rightarrow DH > DF$ tj od CG.

(#) Kroz datu tačku u ravni datog paralelograma povući pravu koja dijeli taj paralelogram na dva podudarna dijela.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data tačka P u ravni paralelograma $▱ABCD$ i neka je p prava koja dijeli dati paralelogram na dva podudarna dijela (jedan dio označimo sa $AMND$ a drugi sa $MBCN$).

Iz podudarnosti ova dva dijela slijedi da je $BM \cong DN$. (odgovarajuće stranice i odgovarajući uglovi su podudarni).

$MB \parallel DN \wedge MB \cong DN \Rightarrow ▱MBND$ je paralelogram u kome prava p sadrži dijagonalu MN.

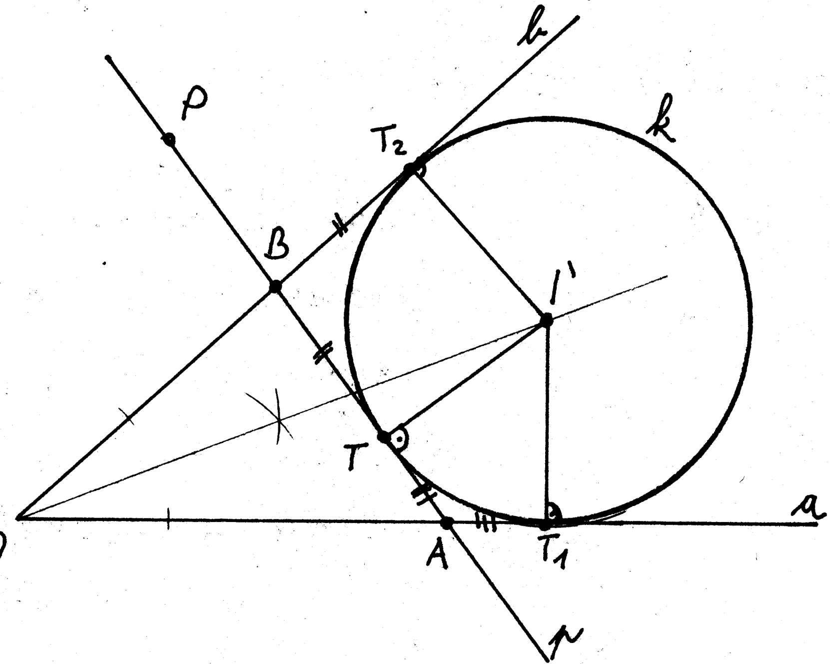
Dijagonale u paralelogramu se polove $\Rightarrow$ prava p sadrži sredinu S dijagonale BD (S je sredina i dijagonale AC).

Prema tome tražena prava p sadrži date tačke P i S pa je možemo konstruisati.

(#) Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku i od datog ugla odsjeca trougao datog obima.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

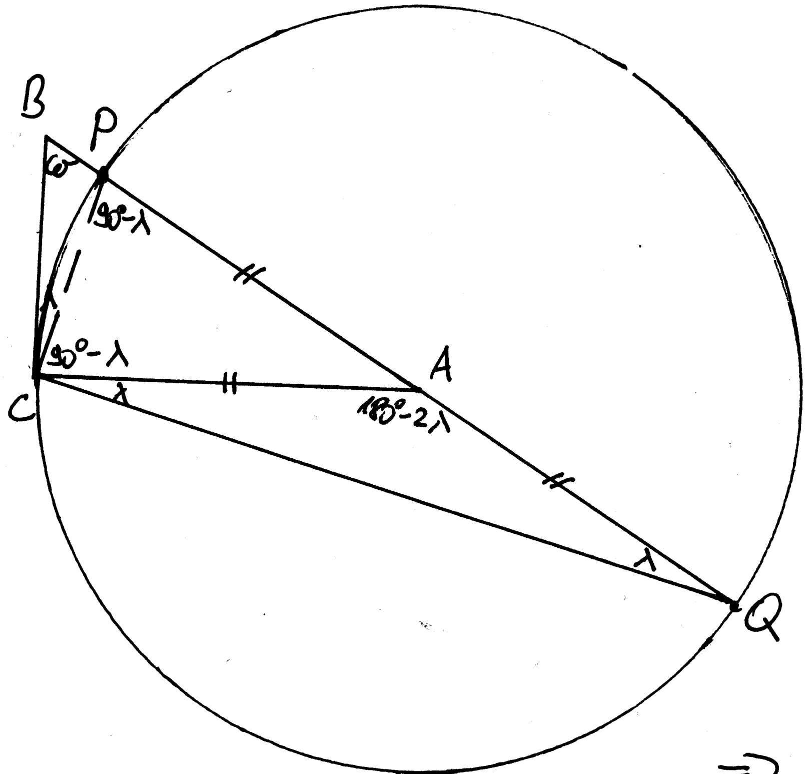


Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku P i od datog ugla $\measuredangle aOb$ odsjeca trougao ΔOAB.
Stranici AB trougla ΔOAB pripišimo kružnicu k sa centrom u I'.
Označimo sa T tačku dodira kružnice k i prave p, a sa T_1 i T_2 tačke dodira kružnice k sa pravima a i b.
Iz osobina tangenti na kružnicu znamo da je $AT \cong AT_1$ i da je $BT \cong BT_2$ (da li bi ovo znali dokazati?)

Kako je dat $\measuredangle aOb$ i obim trougla ΔOAB tačke T_1 i T_2 nije problem konstruisati, a time i kružnicu k. Ako iz tačke P povučemo tangentu na k dobićemo tačke A i B, a time i ΔOAB.

Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome vrijedi da je $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Bez upotrebe Pitagorine teoreme pokazati da je $\measuredangle BCA$ prav ugao.

Rj.



Opišimo krug k sa centrom u A poluprečnika AC i neka je $k \cap AB = \{P\}$ i $p[B, A) \cap k = \{Q\}$.

Sad prema pos(t)avci zadatka je

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = (AB - AC)(AB + AC) = BP \cdot BQ \Rightarrow \frac{BP}{BC} = \frac{BC}{BQ}$$

Za trouglove $\triangle BPC$ i $\triangle BCQ$ vrijedi

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle CBP \cong \measuredangle QBC = \omega \\ \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{BC}{BQ} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič SUS}} \triangle BCP \sim \triangle BQC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle BCP \cong \measuredangle CQB = \lambda$$

$$\triangle ACQ \text{ jkk} \Rightarrow \measuredangle ACQ = \lambda \Rightarrow \measuredangle CAQ = 180° - 2\lambda$$

$$\xRightarrow{\text{perif. ug.}} \measuredangle APC = 90° - \lambda \xRightarrow{\triangle APC \text{ jkk}} \measuredangle PCA = 90° - \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \measuredangle BCA = \measuredangle BCP + \measuredangle PCA = \lambda + 90° - \lambda = 90°$$

q.e.d.